印

組	番	

音波_6_倍音による純正律と分数冪乗による平均律2

純正律は$\frac{3}{2}$倍と$\frac{5}{4}$倍と2倍の組合せだけで全ての音程を作る。純正律は対数目盛のグラフで考えると$\frac{3}{2}$と$\frac{5}{4}$と2の3つの長さの矢印の足し引きで全ての音程を作る。

一方で平均律では半音の倍数として$2^{\frac{1}{12}} \doteqdot 1.0594631$をとりこれの倍数だけですべての音程を作る。

平均律から純正律を見ると $\frac{3}{2} = 1.5$ は $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^7 \doteqdot (1.0594631)^7 = 1.4983071$が対応しているが純正律が平均律より少し大きい、$\frac{5}{4} = 1.25$ は $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^4 \doteqdot (1.0594631)^4 = 1.2599211$が対応しているが純正律が平均律より少し小さい、2 は $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{12} = 2$が完全に対応している。

純正律で$\frac{3}{2}$倍と$\frac{5}{4}$倍と2倍の組み合わせで全ての音程が作れることは、平均律で見れば、$2^{\frac{7}{12}}$と$2^{\frac{4}{12}}$と$2^{\frac{12}{12}}$をかけたり割ったりして $2^{\frac{1}{12}}$、$2^{\frac{2}{12}}$、$2^{\frac{3}{12}}$、$2^{\frac{4}{12}}$、$2^{\frac{5}{12}}$、$2^{\frac{6}{12}}$、$2^{\frac{7}{12}}$、$2^{\frac{8}{12}}$、$2^{\frac{9}{12}}$、$2^{\frac{10}{12}}$、$2^{\frac{11}{12}}$、$2^{\frac{12}{12}}$の全てが作れるかということに対応している。

これはべき乗の部分だけで見れば、4と7と12の3つの数を複数回足したり引いたりして$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$が作れるかという問題になる。

【課題1】4と7と12を複数回使い足し算と引き算だけで1～12までの整数を全て作る作り方を1や8を例に書きなさい。これが純正律の全ての音程の作り方と対応する。(2点)

$1 = 12 - 7 - 4$	$2 =$	$3 =$	4	$5 =$	$6 =$
7	$8 = 4 + 4$	$9 =$	$10 =$	$11 =$	12

【課題2】しかし、例えば8は4+4=8でも12−4=8でも作れる。平均律なら$2^{\frac{4}{12}} \times 2^{\frac{4}{12}} = \mathbf{2^{\frac{8}{12}}}$、$2^{\frac{12}{12}} \div 2^{\frac{4}{12}} = \mathbf{2^{\frac{8}{12}}}$とどちらの作り方も同じ数になるので問題ないが、純正律の場合$\frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{16} = \mathbf{1.5625}$と$2 \div \frac{5}{4} = \frac{8}{5} = \mathbf{1.6000}$は少し異なる倍数になるので作り方で違う音程になってしまう。【課題1】の解答中に他にもこのような例があるか1つ挙げよ。(2点)

この8のときの例から、平均律の$2^{\frac{1}{12}}$の 4 乗に相当する純正律の$\frac{5}{4}$は少し小さく、それを2回かけて作った音程と1回割って1オクターブずらした音程の差は大きすぎる、ということがわかる。したがって純正律の「$\frac{3}{2}$倍と$\frac{5}{4}$倍と2倍の組合せだけで全ての音程を作る」という作り方には次のような制限があると考えられる。『$\frac{3}{2}$倍と$\frac{5}{4}$倍は最大2回までしか使えない』2倍のオクターブはズレがないが、2オクターブ上で作った音を戻すのも変なので1回までと考える。すると、この純正律の音程の作り方では、作られる音程の種類の数に限度があることがわかる。

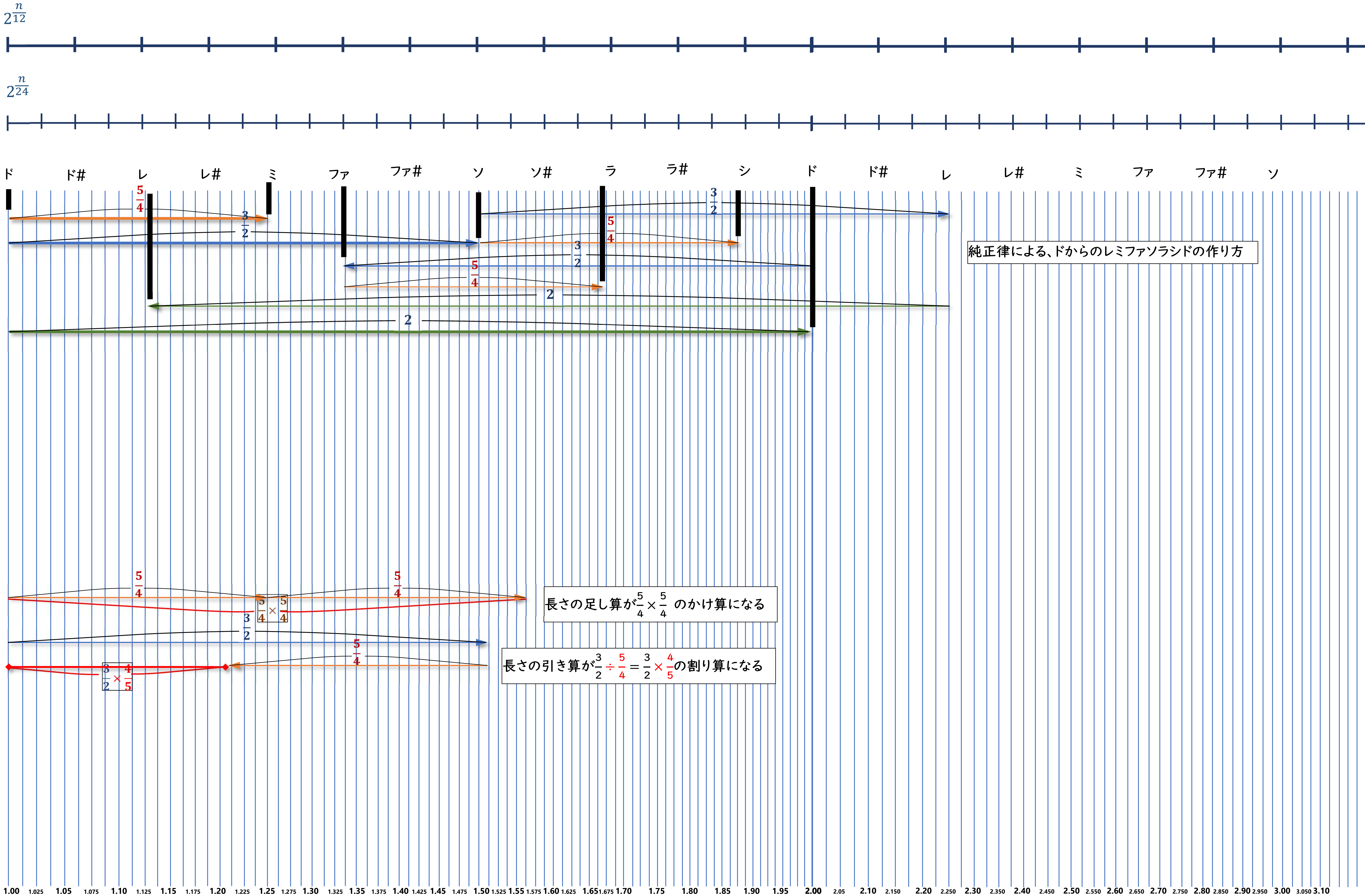
【課題3】1オクターブは基準のドを1倍としてそこから2倍までの振動数で作られる。純正律の音程は次のように書ける。(2点)

$$1 < \left(\frac{5}{4}\right)^a \left(\frac{3}{2}\right)^b 2^i < 2 \qquad a, b = -2, -1, 0, 1, 2 \quad i = -1, 0, 1$$

これを満たす分数は全部で20個ある。<u>裏面のグラフの該当する場所の下の方に、分数で書き込み</u>、該当する音程を確かめよ。場所は$\left(\frac{5}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} 2^0 = \frac{25}{24}$などは、$\frac{5}{4}$の矢印を右へ2回継ぎ足しそこに$\frac{3}{2}$の矢印を左へ1回継ぎ足した所とわかる。

$\left(\frac{5}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} 2^0 = \frac{25}{24}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} 2^1 = \frac{16}{15}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} 2^1 = \frac{10}{9}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{2}\right)^2 2^{-1} = \frac{9}{8}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^1 2^{-1} = \frac{75}{64}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \left(\frac{3}{2}\right)^1 2^0 = \frac{6}{5}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^0 2^0 = \frac{5}{4}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \left(\frac{3}{2}\right)^0 2^1 = \frac{32}{25}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} 2^1 = \frac{4}{3}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} 2^1 = \frac{25}{18}$
$\left(\frac{5}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^1 2^{-1} = \frac{45}{32}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 2^0 = \frac{36}{25}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{2}\right)^1 2^0 = \frac{3}{2}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^0 2^0 = \frac{25}{16}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \left(\frac{3}{2}\right)^0 2^1 = \frac{8}{5}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} 2^1 = \frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 2^{-1} = \frac{225}{128}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \left(\frac{3}{2}\right)^2 2^0 = \frac{9}{5}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^1 2^0 = \frac{15}{8}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \left(\frac{3}{2}\right)^1 2^1 = \frac{48}{25}$

【課題4】【課題3】で少し違う振動数のものが<u>同じ音程に2つある</u>ようなところは、どれを採用したらいいだろうか。<u>2つの音それぞれに、その音を含む和音(発展課題【弦の振動と音楽】(C)を参照)を低周波発振器で鳴らし、聞いた印象を比較した結果を書きなさい。和音の3音を何にしたのか、それぞれの振動数も書きなさい。最終的に何を基準に選んだらいいと思うか、自分の考えを書きなさい</u>(4点)



ドからの振動数の倍数（対数目盛：長さの足し算が、かけ算した長さになる）